

Title	連続群ノMetrisationニ就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 79 p.16-p.21
Issue Date	1936-02-21
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74279
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

356. 連続群ノ Metrisation = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

Topologische kontinuierliche Gruppe G が kompakt \Rightarrow 1es abzählbarkeitsaxiom を満足シテオレバ G が separabel デアルコトハ前 = (紙上談話會 78号 346) 小松氏ト一緋 = 証明 シマシタが更 = 一般 = 次ノ定理が成立シマス。

定理 Topologische kont. Gruppe G が metrisierbar デアルタメ = 必要且ツ十分な條件ハ G が 1es abzählbarkeitsaxiom を満足スルコトデアル。シカモ Metrik ρ ハ

$$\rho(x, y) = \rho(2x, 2y)$$

トナルモノヲトルコトが出来ル。¹⁾

- 1) 近藤氏ノ結果 (東北数学雑誌 三十七卷)ヲ用ヒルト G が 2es abzählbarkeitsaxiom を満足シテオレバ

$$\rho(2x, 2y) = \rho(x, y)$$

ナル Metrik ヲツケルコトが出来ルコトが容易ニワカリ
又 Urysohn-Alexandroffノ結果 (C. R. t. 177, 1923)
ヲ用ヒルト G が 1es abzählbarkeitsaxiom を満足シ
ヲ居レバ metrisierbar デアルコトが容易ニワカリ
ル。

空間が *kompakt* ⇔ *metrisch* ⇔ アレバ *separable* = ナルカラ、コノ定理ハ前ノ結果ヲ含ムコトハ明カデア
 ル。

証明: *Einheitselement* e 、近傍係 $\{U_{\frac{1}{2^n}}\}$
 ($n = 0, 1, 2, \dots$)ヲ

$$U_1 \supset U_{\frac{1}{2}} \supset U_{\frac{1}{4}} \supset \dots \supset U_{\frac{1}{2^n}} \supset \dots \ni e$$

$$U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}, \quad U_{\frac{1}{2^n}}^{-1} = U_{\frac{1}{2^n}}$$

ナル如ク取り

$$U_{\frac{3}{4}} = U_{\frac{1}{2}} \cdot U_{\frac{1}{4}}$$

一般ニ

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \dots \dots \dots (1)$$

トオケバ U_r ハ $r = \frac{k}{2^n}$ ($1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$)

= 對シテ 定義サレテ $1 \leq k \leq 2^n - 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

= 對シテ

$$U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}} \dots \dots \dots (2)$$

ヲ満足スル。コレハ k が偶数ナルトキハ $U_{\frac{k+1}{2^n}}$ 、定義ヨリ
 明カデアアルシ k が奇数 $2m+1$ デアレバ

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

トナリ右辺ハ $n-1$ ノトキニ既ニ (2) が成立スルトスレバ
 $\left(\bigcup \frac{m+1}{2^{n-1}} \equiv \bigcup \frac{(2m+1)+1}{2^n}\right)$ トナル。 $n=1$ ノトキハ (2) ハ明カニ
 成立スルカラ数学的帰納法ニヨリ $n=1, 2, 3, \dots$ ニ對シ
 テ成立スル。

次ニ $f(x)$ ヲ

$$f(e)=0,$$

$x \neq e$ ナルトキハ

$$f(x) = \{x \in U_r \text{ ナル如キ } r \text{ ノ上限}\}$$

トオク。(但シ r ハ $\frac{k}{2^n}$, $1 \leq k \leq 2^n$, ナル如キモノヲ考
 ヘルモノトスル。從ツテ $x \in U_r$ ナラバ $f(x)=1$)。コノ
 $f(x)$ ヲ使ツテ $p(x, y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$p(x, y) = 0 \cdot G \left| f(\xi x) - f(\xi y) \right|.$$

$$\xi \in G$$

コノ $p(x, y)$ が距離ノ三公準及ビ $p(\alpha x, \alpha y) = p(x, y)$
 ヲ満足スルコトハ明カデアアルカラコノ $p(x, y)$ = ヨル近傍
 系が初メノ近傍系ト *équivalent* デアルコトヲ証明スル。

(1) $\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ正数トスルトキ正整数 $n=n(\varepsilon)$
 が定マツテ $x^{-1}y \in U_{\frac{1}{2^n}}$ ナラバ $p(x, y) \leq \varepsilon$ トナル。

証明: $n=n(\varepsilon)$ ヲ $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ナル如クトル。任意ノ

ξ = 對シテ $f(\xi x) < \frac{k}{2^n} \leq f(\xi x) + \frac{1}{2^n}$ ナル如キ $k = k$

(ξ, n) が存在スル。 f ノ定義ヨリ $\xi x \in U_{\frac{k}{2^n}}$, ヨツテ

$$\xi y = \xi x \cdot x^{-1}y \in \bigcup_{\frac{k}{2^n}} \cdot \bigcup_{\frac{1}{2^n}} \subset \bigcup_{\frac{k+1}{2^n}}, \text{ コレヨリ}$$

$$f(\xi y) \leq \frac{k+1}{2^n} \leq f(\xi x) + \frac{2}{2^n} < f(\xi x) + \varepsilon \text{ ヲ得ル,}$$

$x^{-1}y \in \bigcup_{\frac{1}{2^n}}$ ハ $y^{-1}x \in \bigcup_{\frac{1}{2^n}}$ ト同等デアアルカラ x, y ヲ入
レカヘレバ $f(\xi x) < f(\xi y) + \varepsilon$ ヲ得ル。故ニ

$$|f(\xi x) - f(\xi y)| < \varepsilon$$

トナル。 ξ ハ任意デアツタカラ $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ 。

(2) N ヲ任意ノ (十分大キイ) 正整数トスルトキ,
 $\delta = \delta(N)$ ガ定マツテ $\rho(x, y) < \delta$ ナラバ $x^{-1}y \in \bigcup_{\frac{1}{2^N}}$
(コレハ $y^{-1}x \in \bigcup_{\frac{1}{2^N}}$) トナル。

証明: $\delta = \frac{1}{2^N}$ トスレバ

$$\begin{aligned} |f(x^{-1}y)| &= |f(e) - f(x^{-1}y)| \leq \rho(e, x^{-1}y) \\ &= \rho(x, y) < \delta = \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

トナリ, f ノ定義ヨリ $x^{-1}y \in \bigcup_{\frac{1}{2^N}}$ トナルコトハ明カデアアル。

(定理ノ証明終)

Hausdorff (Math. Ann. Bd. 107) ハ Topolo-
gische kont. Gruppe G = 對シテ

$$\rho(x, y) = \rho(zx, zy) = \rho(xz, yz)$$

ナル Metrik が導入出来ルタメノ必要十分條件ヲ與ヘテ
オリマスガ、コノ様ナ Metrik ハ

$$\rho(e, x) = \rho(e, t^{-1}xt)$$

ヲ満足シマスカラ、 $x \neq e$ ナル Element x ヲ $t = \tau$ 変換シタモノ $t^{-1}xt$ 全体ノ集合ガ e ヲ集積点ニ持ツヤウナ Gruppe = 對シテハ、カナル Metrik ハ導入出来ナイ。

例ヘバ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2)}$$

デアルカラ *Matrizengruppe* = ハカナル Metrik ハ導入出来ナイ。

シカシ片側ダケノ関係

$$\rho(2x, 2y) = \rho(x, y)$$

ヲ満足スル Metrik ハ存在スル。例ヘバ $A = (a_{ik})$
 $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ = 對シテ

$$\|A\| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|$$

トオキ

$$\rho(A, B) = \log \{ 1 + \|A^{-1}B - E\| + \|B^{-1}A - E\| \}$$

トオケバヨイ。

$$\rho(A, A) = 0; \quad \rho(A, B) > 0 \quad A \neq B$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A), \quad \rho(CA, CB) = \rho(A, B)$$

ナルコトハ明デアルカラ三角不等式

2) コノ例ハ淺野氏ニ教ヘテイタダキマシタ。

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$$

ヲ証明シヨウ。 $\|A\|$ ノ定義ヨリ

$$\|P \cdot Q\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$$

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$$

デアルカラ

$$\begin{aligned} \|A^{-1}C - E\| &= \|(A^{-1}B - E)(B^{-1}C - E) + (A^{-1}B - E) + (B^{-1}C - E)\| \\ &\leq \|A^{-1}B - E\| \cdot \|B^{-1}C - E\| + \|A^{-1}B - E\| + \|B^{-1}C - E\| \end{aligned}$$

同様ニ

$$\|C^{-1}A - E\| \leq \|C^{-1}B - E\| \cdot \|B^{-1}A - E\| + \|C^{-1}B - E\| + \|B^{-1}A - E\|$$

コレヲ、二式ト $\rho(A, B)$ ノ定義ヨリ 求ムル不等式ヲ得ル。